



MATEMÁTICAS II

JUNIO 2021

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b .

Solución:

la asíntota oblicua tiene como ecuación $y = mx + n$, siendo

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

pendiente 2 $\rightarrow m = 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+bx+2}{x^2-x} = a = 2 \rightarrow a = \underline{\underline{2}}$$

calculamos n

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^2+bx+2}{x-1} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+bx+2-2x^2+2x}{x-1} = 2+b$$

la asíntota $y = 2x + 2 + b$

$$\text{Pasa por } (1, 1) \rightarrow 1 = 2 + 2 + b \rightarrow b = \underline{\underline{-3}}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Considere la función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = \begin{cases} (3x-6)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{36(\sin(x) - ax)}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula a . (1,5 puntos)

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$. (1 punto)

Solución:

a) Como la función es continua en $\mathbb{R}$:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$f(0) = (3 \cdot 0 - 6)e^0 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (3x-6)e^x = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\sin(x) - ax)}{x^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\cos(x) - a)}{3x^2} = \frac{36(1-a)}{0}$$



como la función es continua, el límite tiene que existir y ser finito por lo que

$$36(1-a) = 0 \rightarrow 36 - 36a = 0 \rightarrow a = \underline{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{36(\cos x - 1)}{3x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-36 \sin x}{6x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hopital}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{36 \cos x}{6} = -6$$

b) la recta tangente en $x = -1$

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$$

$$f(-1) = (-3-6)e^{-1} = -9e^{-1} = -\frac{9}{e}$$

$$f'(x) = 3e^x + (3x-6)e^x \Rightarrow f'(-1) = -6e^{-1} = -\frac{6}{e}$$

$$\text{Luego: } y + \frac{9}{e} = -\frac{6}{e}(x+1)$$

$$y = \frac{-6x-15}{e} //$$

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Considere la función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . (1 punto)
- Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas. (1.5 puntos)

Solución:

$$a) \quad f(x) = 4x^3 - x^4$$

Calculamos la primera derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 0 \rightarrow 4x^2(3-x) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	-
Función	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

La función crece en $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$ y decrece en $(3, \infty)$

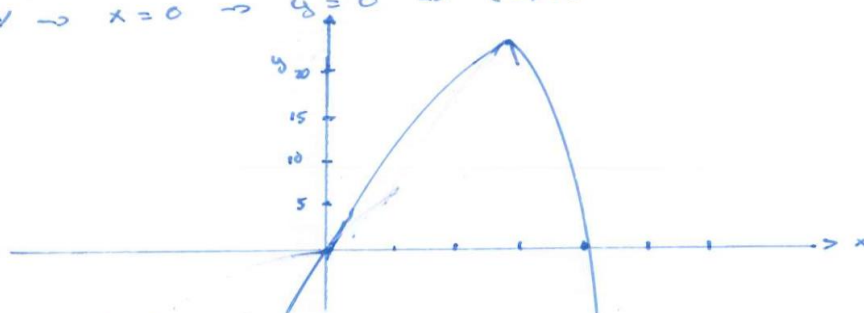
Tiene un máximo relativo en $(3, 27)$



b) calculamos puntos de corte con los ejes

$$Ox \rightarrow y=0 \rightarrow 4x^3 - x^4 = 0 \rightarrow x^3(4-x)=0 \begin{cases} x=0 & (0,0) \\ x=4 & (4,0) \end{cases}$$

$$Oy \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow (0,0)$$



El área pedida:

$$A = \int_0^4 (4x^3 - x^4) dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \left(256 - \frac{1024}{5} \right) - 0 = \frac{256}{5} \text{ u}^2 //$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Considera la función $F: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x=1$.

Solución:

Ecuación de la recta tangente $y - F(1) = F'(1)(x-1)$

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt = \left[t^2 + \frac{2t^{3/2}}{3} \right]_0^x = x^2 + \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$$

$$F(1) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$F'(x) = 2x + \sqrt{x} \Rightarrow F'(1) = 2 + 1 = 3$$

Luego $y - \frac{5}{3} = 3(x-1) \rightarrow y = 3x - \frac{4}{3}$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m . (1,5 puntos)
- Resuelve el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. (1 punto)

Solución:



a)

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m + \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$|A| = -15m + 4 - 4 - 6m^2 = 0 \rightarrow -6m^2 - 15m = 0 \rightarrow -m(6m + 15) = 0$$

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = -\frac{5}{2}$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq -5/2$ el rango de $A = \text{Rango } B = n^{\circ}$ incógnitas
Sistema compatible determinado $\rightarrow$ una solución

- Si $m = 0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$

Rango A: $|A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2/5 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } B = 2$$

Rango A = Rango B $\neq n^{\circ}$ de incógnitas $\rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow \infty$ Soluciones

- Si $m = -5/2$ $A = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & -15/2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -15/2 & 0 & -21/10 \end{pmatrix}$

$$|A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -15/2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 2$$

$$\begin{vmatrix} -5/2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -21/10 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } B = 3$$

Rango A $\neq$ Rango B $\Rightarrow$ S.I. $\rightarrow$ no tiene solución.

b) Para $m = 0 \rightarrow$ S.C.I. n° de incógnitas - Rango = n° indeterminaciones

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x = 2/5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5 \cdot \frac{2}{5} - 4y + 2z = 0 \\ 2 - 4y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 - 2 = 1 \\ y = \frac{1+z}{2} \\ x = 2/5 \\ z = z \end{cases}$$

No hay solución $x=0$, para cualquier valor de z , x siempre vale $2/5$



Ejercicio 6. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Solución:

x botellas
 y garrafas
 z = bidones.

Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} 0,05x + 0,1y + z = 10 \\ x = 2y \\ x + y + z = 52 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 0,1y + 0,1y + z = 10 \\ 2y + y + z = 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,2y + z = 10 \\ 3y + z = 52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,2y + z = 10 \\ -3y - z = -52 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 0,2y + z = 10 \\ -3y - z = -52 \\ \hline -2,8y = -42 \\ y = \frac{-42}{-2,8} = 15 \end{array}$$

$x = 2 \cdot y = 2 \cdot 15 = 30$
 Produce 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones.

Ejercicio 7. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

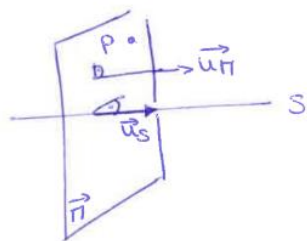
Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

- a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$. (1,5 puntos)
 b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$. (1 punto)

Solución:

a) calcular el plano π a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$



s y π son $\perp \rightarrow \vec{u}_s \parallel \vec{u}_\pi$

$$\vec{u}_\pi = \vec{u}_s = (-2, 1, 2)$$

$$\text{Ec. del plano } \pi: -2x + y + 2z + D = 0$$

Pasa por el punto P . Sustituimos el punto en el plano.

$$-2 \cdot (1) + 0 + 2 \cdot (-5) + D = 0 \Rightarrow D = 12$$

$$\boxed{\pi \equiv -2x + y + 2z + 12 = 0}$$



b) Calcular el seno del ángulo que forman r y π

$$\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\text{Sen}(r, \pi) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_\pi|} = \frac{|16 - 7 - 10|}{\sqrt{(-8)^2 + (-7)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$\text{Sen}(r, \pi) = \frac{1}{\sqrt{138} \cdot 19} = 0,0283$$

Ejercicio 8. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s , que pasa por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(a, 1, 0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución:

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$$

s pasa por los puntos $P(1, 0, 2)$ $Q(a, 1, 0)$

Calculamos la ec. de la recta s .

$$\vec{PQ} (a-1, 1, -2) \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + (a-1)t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Un punto genérico de la recta s $(1 + (a-1)t, t, 2 - 2t)$

Si r y s se cortan este punto de s tiene que verificar la ec. de r .

$$\frac{1 + (a-1)t + 3}{2} = \frac{t + 4}{2} = \frac{2 - 2t - 3}{3} \quad \text{Resolvemos:}$$



$$\begin{cases} 2(1+at-t+3) = 2t+8 \\ 3(t+4) = 2(2-2t-3) \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} 2 + 2at - 2t + 6 = 2t + 8 \\ 3t + 12 = 4 - 4t - 6 \end{cases} \right|$$

$$\begin{aligned} 2at - 2t &= 2t \quad \rightarrow \quad 2at - 4t = 0 \rightarrow t(2a-4) = 0 \\ 3t + 4t &= -6 + 4 - 12 \quad \rightarrow \quad 7t = -14 \rightarrow \boxed{t = -2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(2a-4) &= 0 \rightarrow \cancel{t=0} \text{ No válido} \\ &\rightarrow 2a-4=0 \Rightarrow \boxed{a=2} \end{aligned}$$

r y s se cortan en un punto si $a=2$.

$$\begin{aligned} \text{Punto de corte. } (1+(2+1)(-2), -2, 2-2(-2)) &= \\ &= (-1, -2, 6) \end{aligned}$$